第８講　漸化式と極限

8

［A］　p を 0 でない実数とする．数列 a_1，a_2，…… を次のように定義する．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$|p|=1$ のとき，a_n を求めよ．

(2)　$|p|\neq 1$ のとき，a_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

［B］　2 次方程式 $x^2-5x-5=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とし，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ により定める．このとき，$a_1=\boxed{}$，$a_2=\boxed{}$，$a_3=\boxed{}$ であり，$\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\boxed{}\,a_{n+1}+\boxed{}\,a_n$$

を満たす．実数 t に対し，t を超えない最大の整数を記号 $[t]$ で表し，$\langle t\rangle=t-[t]$ とおく．たとえば，$\left\langle -\dfrac{1}{3}\right\rangle=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．2 つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$p_n=\langle\alpha^n\rangle$$
$$q_n=\langle\beta^n\rangle$$

により定める．$[\alpha]=\boxed{}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\boxed{}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=\boxed{}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n}=\boxed{}$ となる．すべての n について $\langle a_n\rangle=\boxed{}$ である．したがって，次の極限値が得られる．

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\boxed{}$$
$$\lim_{n\to\infty}q_{2n}=\boxed{}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と極限

8　ある１面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の４辺のうち１辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と極限

8

［A］ p を 0 でない実数とする．数列 a_1，a_2，…… を次のように定義する．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $|p|=1$ のとき，a_n を求めよ．

(2) $|p|\neq 1$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

［B］ 2 次方程式 $x^2-5x-5=0$ の 2 つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とし，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ により定める．このとき，$a_1=$［　　］，$a_2=$［　　］，$a_3=$［　　］であり，$\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\boxed{}\,a_{n+1}+\boxed{}\,a_n$$

を満たす．実数 t に対し，t を超えない最大の整数を記号 $[t]$ で表し，$\langle t\rangle=t-[t]$ とおく．たとえば，$\left\langle -\dfrac{1}{3}\right\rangle=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．2 つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$p_n=\langle\alpha^n\rangle$$
$$q_n=\langle\beta^n\rangle$$

により定める．$[\alpha]=$［　　］，$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=$［　　］であるから，$\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=$［　　］，$\lim_{n\to\infty}p_{2n}=$［　　］となる．すべての n について $\langle a_n\rangle=$［　　］である．したがって，次の極限値が得られる．

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\boxed{}$$
$$\lim_{n\to\infty}q_{2n}=\boxed{}$$

【答】 ［A］ (1) $a_n=\begin{cases} n & (p=1)\\ (-1)^{n+1}n & (p=-1)\end{cases}$　(2) $a_n=\dfrac{p}{p^2-1}(p^n-p^{-n})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases} p & (|p|\geqq 1)\\ \dfrac{1}{p} & (|p|<1)\end{cases}$

［B］ 順に，5，35，200，5，5，2，3，−1，0，1，0，0，0，1

【解説】

［A］ (1) $p=1$ のとき

$$a_{n+1}=a_n+1$$

よって　$\{a_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列となるので

$$a_n=1+(n-1)\times 1=\boldsymbol{n}$$

$p=-1$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{-n}$$
$$\iff \frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=\frac{a_n}{(-1)^n}-1$$

よって $\left\{\dfrac{a_n}{(-1)^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{-1}=-1$，公差 -1 の等差数列となるので

$$\frac{a_n}{(-1)^n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n$$
$$\therefore\ a_n=\boldsymbol{(-1)^{n+1}n}$$

(2)
$$a_{n+1}=pa_n+p^{-n}$$
$$\iff \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{p^3}\left(\frac{1}{p^2}\right)^{n-1}$$

よって $\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列は $\dfrac{1}{p^3}\left(\dfrac{1}{p^2}\right)^{n-1}$ となるので

$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p^1}+\frac{\dfrac{1}{p^3}\left\{\left(\dfrac{1}{p^2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\dfrac{1}{p^2}-1}$$
$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p(1-p^2)}\left(\frac{1}{p^{2n-2}}-1\right)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=\frac{p}{p^2-1}(p^n-p^{-n})}\ \ \text{（これは } n=1 \text{ のときにも成り立つ）}$$

(3)　$p=1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}\to 1\ \ (n\to\infty)$$

$p=-1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}$$
$$=-\frac{n+1}{n}\to -1\ \ (n\to\infty)$$

$|p|\neq 1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^{n+1}-p^{-(n+1)}}{p^n-p^{-n}}$$

であるから

$|p|>1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p-\dfrac{1}{p^{2n+1}}}{1-\dfrac{1}{p^{2n}}}\to p\ \ (n\to\infty)$$

$|p|<1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^{2n+1}-p^{-1}}{p^{2n}-1}\to\frac{1}{p}\ \ (n\to\infty)$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上をまとめて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}=\begin{cases}\boldsymbol{p} & (|\boldsymbol{p}|\geqq \mathbf{1})\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} & (|\boldsymbol{p}|<\mathbf{1})\end{cases}$$

［B］ 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=5,\qquad \alpha\beta=-5$$

となる.

$$a_1=\alpha+\beta=\mathbf{5}$$
$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\mathbf{35}$$
$$a_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\mathbf{200}$$

また

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-(\alpha^n+\beta^n)\alpha\beta$$

より

$$a_{n+2}=\mathbf{5}a_{n+1}+\mathbf{5}a_n$$

$[t]$ は t の整数部分なので，$\langle t\rangle=t-[t]$ は t の小数部分を表す．よって

$$\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

である.

$f(x)=x^2-5x-5$ とおくと

$$f(-1)=1>0,\qquad f(0)=-5<0$$

より

$$-1<\alpha<0$$

よって

$$[\alpha]=\mathbf{-1},\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha^n=\mathbf{0}$$

であり，$\alpha^{2n+1}<0$ より

$$\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=\mathbf{1}$$

$\alpha^{2n}>0$ より

$$\lim_{n\to\infty}p_{2n}=\mathbf{0}$$

また帰納的に a_n は自然数であるから

$$\begin{aligned}\langle a_n\rangle=\mathbf{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad\langle\alpha^n+\beta^n\rangle=0\\ &\Longleftrightarrow\quad\langle\alpha^n\rangle+\langle\beta^n\rangle=1\\ &\therefore\quad\langle\beta^n\rangle=1-\langle\alpha^n\rangle\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\mathbf{0},\qquad \lim_{n\to\infty}q_{2n}=\mathbf{1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　漸化式と極限

8　ある１面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の４辺のうち１辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

【答】　(1) $a_2=\frac{1}{2}$　(2) $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$　(3) $b_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $(n\geqq 1)$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{6}$

【解説】

(1)　１回目には印のついた面が側面にくるので $a_1=1$

よって

$$a_2=a_1\times\frac{2}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2)　$a_1=1$ と対称性より底面にくる確率と上面にくる確率は等しい．ゆえに

$$a_n+2b_n=1$$
$$\therefore\quad b_n=\frac{1-a_n}{2}$$

よって

$$a_{n+1}=a_n\times\frac{2}{4}+2b_n\times 1$$
$$=\frac{1}{2}a_n+(1-a_n)$$
$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

ゆえに

$$b_n=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right]$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。